

# Escoamento em Canais

## 1. INTRODUÇÃO

### 1.1 O ESCOAMENTO LIVRE EM CANAIS

Os escoamentos livres, também referenciados como escoamentos em canais tem um grande número de aplicações práticas na engenharia, estando presente em áreas como o saneamento, a drenagem urbana, irrigação, hidro-eletricidade, navegação e conservação do meio ambiente.

Em todas estas aplicações exige-se que o tratamento matemático a ser aplicado possa englobar a forma mais genérica de escoamento, ou seja, aquele não permanente e não uniforme.

Neste trabalho serão apresentadas as equações diferenciais parciais que governam os escoamentos com superfícies livres, que ocorrem em canais artificiais, rios e estuários. Como as equações serão apresentadas para os escoamentos não permanentes, os casos particulares de escoamentos permanentes e condições uniformes estarão automaticamente equacionados .

### 1.2 ESTE TEXTO

Este texto está organizado de forma a apresentar o desenvolvimento matemático das equações que tratam do escoamento hidrodinâmico nos canais e o tratamento numérico de forma a resolvê-las através de sistemas computacionais.

Inicialmente serão apresentadas as equações fundamentais desde sua origem. Em seguida serão desenvolvidos modelos numéricos para solução destas equações para os casos de regimes permanentes e transitórios, sendo que neste caso apresentam-se dois métodos de solução.

A aplicação prática dos métodos ora apresentados será feita por intermédio da solução de alguns problemas típicos com o uso de modelo matemático SIMC-Simulador Hidrodinâmico de Canais, desenvolvido por Podalyro Amaral de Souza, José Rodolfo S. Martins, Francisco Martins Fadiga Jr., Honório Lisboa Neto, Winston Hisasi Kanashiro, pesquisadores da FCTH-Fundação Centro Tecnológico de Hidráulica, São Paulo, Brasil.

A área em branco à direita do texto destina-se a anotações e comentários dos participantes e pode ser usada sem medo.

## 2. AS EQUAÇÕES BÁSICAS

As equações básicas utilizadas para caracterização do escoamento em canais foram estabelecidas no início do século XIX por Barré de Saint-Venant e derivam da lei da conservação da massa e da conservação da quantidade de movimento.

### 2.1 EQUAÇÃO DA CONSERVAÇÃO DA MASSA

Para a dedução desta equação serão adotadas as seguintes hipóteses:

- (a) Fluido incompressível
- (b) Distribuição uniforme de velocidade

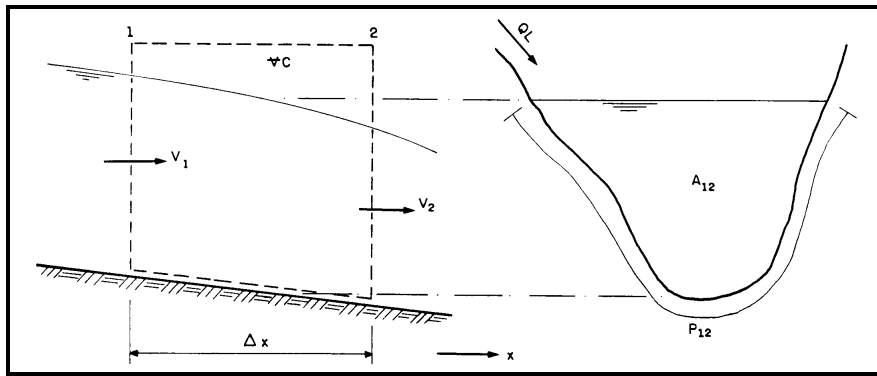


FIGURA 1

A Conservação de Massa em forma integral é expressa por:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\nabla C} \rho dV + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (1)$$

que aplicada ao volume de controle ( $\nabla C$ ) indicado na Fig. 1, fornece:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \Delta x A_{12}) - \rho V_1 A_1 + \rho V_2 A_2 - \rho Q_L \cong 0 \quad (2)$$

onde  $A_{12}$  é uma área média entre as seções 1 e 2 e  $Q_L$  é a vazão de contribuição lateral.

Tomando-se o limite quando  $\Delta x \rightarrow 0$ , do primeiro membro da Eq. (2), após a divisão  $\rho \Delta x$ , ter-se-á realmente o primeiro membro igual a zero, isto é:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (A_{12}) + \frac{Q_2 - Q_1}{\Delta x} - \frac{Q_L}{\Delta x} \right] \cong 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} - q = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q}$$

(3)

onde "q" é a vazão de contribuição lateral por unidade de comprimento x [ $m^3/(s.m)$ ].

A Eq. (3) é a primeira das Equações de Saint-Venant e pode ser apresentada de outras maneiras, tais como:

$$B \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q \tag{4}$$

$$B \frac{\partial h}{\partial t} + V \frac{\partial A}{\partial x} + A \frac{\partial V}{\partial x} = q \tag{5}$$

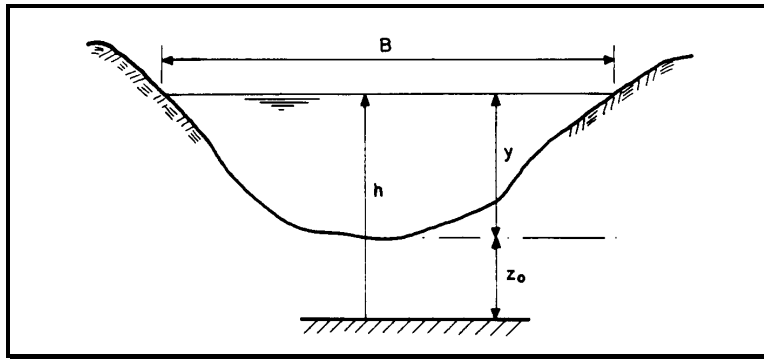


FIGURA 2

Para canal retangular, com  $\partial h/\partial t = \partial y/\partial t$  e  $A=By$ , a Eq. (5) fica transformada em:

$$\frac{\partial y}{\partial t} + V \frac{\partial y}{\partial x} + y \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{q}{B} \tag{6}$$

## 2.2 EQUAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO

A Quantidade de Movimento em forma integral é expressa por:

$$\sum \vec{F}_{ex_{sup}} + \int_{\forall C} \rho \vec{B} d\forall = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\forall C} \rho \vec{V} dV + \int_{SC} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot d\vec{A}) \tag{7}$$

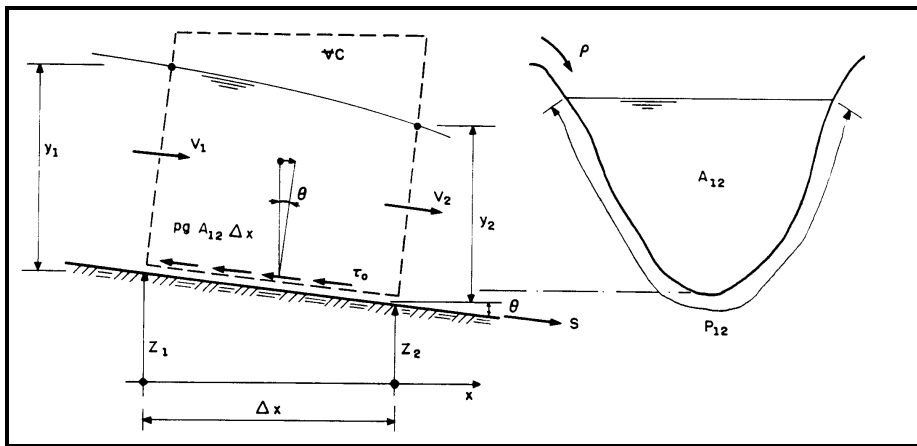


FIGURA 3

A Eq. (7) é então aplicada ao  $\forall c$  indicado na Figura 3 levando-se em conta as seguintes hipóteses:

- (a) Fluido incompressível
- (b)  $\tau_0$  é uniforme ao longo do perímetro molhado
- (c)  $\theta$  é um ângulo pequeno, tal que  $|\text{sen } \theta| \cong |\text{tg } \theta| = i$
- (d) a pressão distribui-se hidrostaticamente

A Eq. (7) é vetorial e a equação procurada resultará da projeção da mesma na direção paralela ao fundo do canal (direção s).

$$\sum \vec{F}_{ex, sup} \cong \rho g \bar{y}_1 A_1 - \rho g \bar{y}_2 A_2 - P_{12} \Delta x \tau_0 + (A_2 - A_1) \rho g \bar{y}_{12} \tag{8}$$

$$\int_{\forall C} \rho \vec{B} dV \cong \rho g A_{12} \Delta x |sen\theta| \tag{9}$$

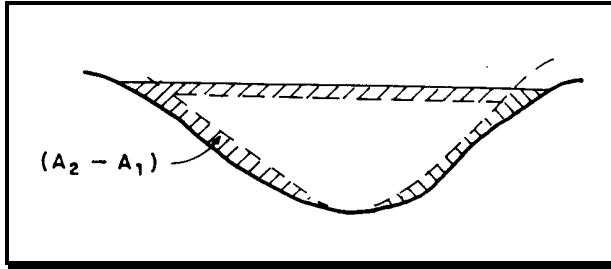


FIGURA 4

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\forall C} \rho \vec{V} dV \cong \frac{\partial}{\partial t} (\rho V_{12} A_{12} \Delta x) \tag{10}$$

$$\int_{sC} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot d\vec{A}) \cong -\rho \beta_1 Q_1 V_1 + \rho \beta_2 Q_2 V_2 \tag{11}$$

Para se escrever a Eq.(11) admitiu-se que não há contribuição da vazão lateral em termos de fluxo de quantidade de movimento na direção "s" por ter-se  $V_L$  ortogonal à s. Substituindo-se os resultados (8),..., (11) em (7), obtém-se:

$$\begin{aligned} -\rho g (\bar{y}_2 A_2 - \bar{y}_1 A_1) - P_{12} \Delta x \tau_0 + (A_2 - A_1) \rho g \bar{y}_{12} + \rho g A_{12} \Delta x |sen\theta| &\cong \\ &\cong \frac{\partial}{\partial t} (\rho V_{12} A_{12} \Delta x) + \rho (\beta_2 Q_2 V_2 - \beta_1 Q_1 V_1) \end{aligned}$$

Divide-se esta equação por  $\rho \Delta x$  e toma-se o limite para  $\Delta x \rightarrow 0$  de ambos os membros:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ -g \left( \frac{\bar{y}_2 A_2 - \bar{y}_1 A_1}{\Delta x} \right) - \frac{P_{12} \tau_0}{\rho} + g \bar{y}_{12} \left( \frac{A_2 - A_1}{\Delta x} \right) + g A_{12} |sen\theta| \right] &= \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (V_{12} A_{12}) + \left( \frac{\beta_2 Q_2 V_2 - \beta_1 Q_1 V_1}{\Delta x} \right) \right] & \end{aligned}$$

Feitos os limites, obtém-se:

$$-g \frac{\partial}{\partial x} (A \bar{y}) - \frac{P \tau_0}{\rho} + g \bar{y} \frac{\partial A}{\partial x} + g A |sen\theta| = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\beta Q^2}{A} \right)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\beta Q^2}{A} \right) + g A \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} + g \bar{y} \frac{\partial A}{\partial x} - g \bar{y} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{P \tau_0}{\rho} - g A |sen\theta| = 0$$

Fazendo-se:

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial x} \cong \frac{\partial y}{\partial x} \quad \frac{P \tau_0}{\rho} = gAS_f \quad |\text{sen}\theta| = |\text{tan}\theta| = -dz_0/dx$$

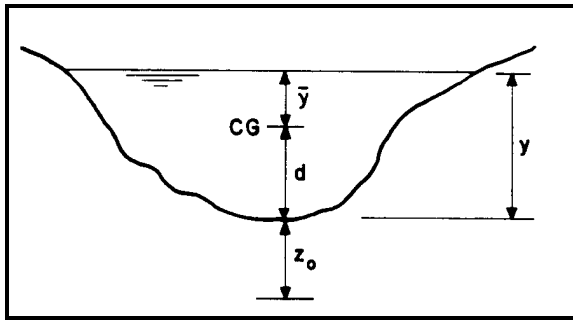


FIGURA 5

obtem-se a segunda Equação de Saint-Venant:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\beta Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial y}{\partial x} + gA(S_f - S_0) = 0$$

(12)

onde  $\beta$  é o coeficiente de quantidade de movimento, dado por:

$$\beta = \frac{1}{AV^2} \int_A v^2 dA$$

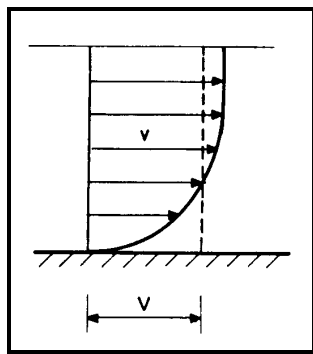


FIGURA 6

e " $S_f$ " é a declividade da linha carga total, que pode ser expressa por:

$$V = 8.21 \sqrt{g} \left( \frac{R_h}{K} \right)^{1/6} \sqrt{R_h S_f}$$

de onde:

$$S_f = \frac{V^2}{65,68g} \left( \frac{K}{R_h} \right)^{1/3} \frac{1}{R_h}$$

(13)

A segunda Equação de Saint-Venant pode ser escrita em termos de cota "h" da superfície livre. Para isto faz-se:  $S_0 = -dz/dx$  e  $h = y + z$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\beta Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial h}{\partial x} + gAS_f = 0 \quad (14)$$

### 2.3 SIMPLIFICAÇÕES DAS EQUAÇÕES BÁSICAS

Os vários modelos de escoamento num canal, seja um regime permanente ou uma onda de enchente são sempre representados pela Eq.(3) e por uma forma completa ou simplificada da Eq.(12), como indicado a seguir :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\beta Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial y}{\partial x} + gA(S_f - S_0) = 0 \Rightarrow \textit{onda - dinâmica}$$

$$gA \frac{\partial y}{\partial x} + gA(S_f - S_0) = 0 \Rightarrow \textit{onda - difusa}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} + gA(S_f - S_0) = 0 \Rightarrow \textit{onda - gravitacional}$$

$$gA(S_f - S_0) = 0 \Rightarrow \textit{onda - cinemática}$$

O critério abaixo, proposto pelo Prof. Victor Miguel Ponce (Colorado State University) fornece uma orientação do tipo de modelo mais adequado a ser empregado num caso prático:

$$TS \frac{i}{f} \left( \frac{g}{y_0} \right)^{1/2} < 30 \mapsto \textit{onda - dinâmica}$$

$$TS \frac{i}{f} \left( \frac{g}{y_0} \right)^{1/2} \geq 30 \Leftrightarrow TS \frac{i}{f} F_0 \left( \frac{g}{y_0} \right)^{1/2} < 171 \mapsto \textit{onda - difusa}$$

$$TS \frac{i}{f} \left( \frac{g}{y_0} \right)^{1/2} \geq 30 \Leftrightarrow TS \frac{i}{f} F_0 \left( \frac{g}{y_0} \right)^{1/2} \geq 171 \mapsto \textit{onda - cinemática}$$

sendo que T é o período da onda, i é a declividade do fundo, y<sub>0</sub> é uma profundidade "efetiva" e F<sub>0</sub> é o número de Froude.

### 3. MODELOS NUMÉRICOS PARA ESCOAMENTOS LIVRES

Existem em grande número, modelos numéricos destinados à solução das equações (3) e (12), seja na forma completa ou em qualquer das expressões simplificadas. Em todos os casos, estes modelos baseiam-se num dos métodos numéricos tradicionais de integração de equações diferenciais, tais como diferenças finitas, elementos finitos, elementos de contorno, características e outros.

Os métodos de diferenças finitas são de longe os mais populares entre os pesquisadores hidráulicos pois apresentam grande facilidade na formulação das expressões numéricas e condições de extremidade.

#### 3.1 ESCOAMENTOS PERMANENTES

A modelação matemática dos escoamentos permanentes tem grande aplicação prática no cálculo de linhas d'água, determinação de secções ou trechos de controle, estudo de rugosidades e perdas de carga, extrapolação de curvas de descarga.

No caso particular dos escoamentos permanentes, as equações básicas resumem-se à equação (12), de onde se pode desprezar o termo  $\partial Q/\partial t$ :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\beta Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial h}{\partial x} + gAS_f = 0 \tag{15}$$

Desenvolvendo a equação (15) em todos os seus termos obtém-se:

$$\frac{Q^2}{A} \frac{\partial \beta}{\partial x} + 2\beta \frac{Q}{A} \frac{\partial Q}{\partial x} - \beta \frac{Q^2}{A^2} \left[ \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial x} \Big|_{h=const} \right] + gA \frac{\partial h}{\partial x} + gAS_f = 0$$

que pode ser simplificada para:

$$\frac{Q^2}{A} \frac{\partial \beta}{\partial x} + 2\beta \frac{Q}{A} q + gA(1 - \beta F_r^2) \frac{\partial h}{\partial x} - \beta \frac{Q^2}{A^2} \frac{\partial A}{\partial x} \Big|_{h=const} + gAS_f = 0 \tag{16}$$

Considerando o esquema da Figura 5.1 abaixo, a equação (16) pode ser discretizada através de diferenças finitas, permitindo a obtenção de um sistema de equações para cálculo da linha d'água:

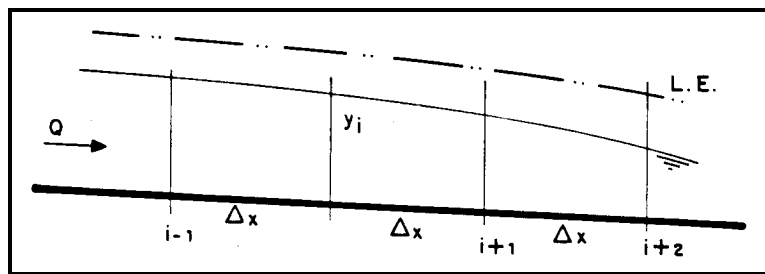


FIGURA 7

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta}{\partial x} &= \frac{\beta_{i+1} - \beta_i}{\Delta x} & \frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{h_{i+1} - h_i}{\Delta x} & \bar{A}_i &= \frac{A_{i+1} + A_i}{2} \\ \bar{\beta}_i &= \frac{\beta_{i+1} + \beta_i}{2} & \bar{F}_{r_i}^2 &= \frac{Q_i^2 B_i}{gA_i^3} & \bar{F}_{r_i}^2 &= \frac{\bar{F}_{r_{i+1}}^2 + \bar{F}_{r_i}^2}{2} \end{aligned}$$

O parâmetro Sf, pode ser obtido através da equação de Chèzy, considerando o coeficiente de rugosidade análogo ao da Fórmula de Darcy:

$$\bar{S}_f = \frac{S_{f_{i+1}} + S_{f_i}}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{Q_{i+1}^2}{K_{i+1}^2} + \frac{Q_i^2}{K_i^2} \right)$$

onde  $K = CAR_h^{1/2}$  e  $C = (8g/f)^{1/2}$ .

Substituindo as diferenças na equação (16), resulta:

$$\begin{aligned} \frac{gA}{\Delta x} (1 - \beta \bar{F}_r^2) (h_{i+1} - h_i) &= 2\beta \frac{\bar{Q}}{A} \bar{q} - \frac{Q^2}{A} \left( \frac{\beta_{i+1} - \beta_i}{\Delta x} \right) + \\ &+ \beta \frac{\bar{Q}^2}{A^2} \left( \frac{A_{i+1} - A_i}{\Delta x} \right) \Big|_{h=const} - gA \bar{Q}^2 \left( \frac{1}{K_{i+1}^2} + \frac{1}{K_i^2} \right) \end{aligned} \tag{17}$$

sendo que  $\beta_i$ ,  $A_i$  e  $y_i$  representam os parâmetros no trecho compreendido entre  $i$  e  $i+1$ . A equação (17) aplicada entre diversas seções de um canal produz um sistema de  $(n-1)$  equações a  $n$  incógnitas:

$$\begin{aligned} D_1 h_2 + B_1 h_1 &= E_1 \\ D_2 h_3 + B_2 h_2 &= E_2 \\ D_3 h_4 + B_3 h_3 &= E_3 \\ &\dots\dots\dots \\ D_{n-1} h_n + B_{n-1} h_{n-1} &= E_{n-1} \end{aligned}$$

sendo:

$$\begin{aligned} D_i &= -B_i = \frac{gA}{\Delta x} (1 - \beta \bar{F}_r^2) \\ E_i &= 2\beta \frac{\bar{Q}}{A} \bar{q} - \frac{Q^2}{A} \left( \frac{\beta_{i+1} - \beta_i}{\Delta x} \right) + \\ &+ \beta \frac{\bar{Q}^2}{A^2} \left( \frac{A_{i+1} - A_i}{\Delta x} \right) \Big|_{h=const} - gA \bar{Q}^2 \left( \frac{1}{K_{i+1}^2} + \frac{1}{K_i^2} \right) \end{aligned} \tag{18}$$

O sistema pode ser solucionado pelo esquema de "dupla-varredura", adotando-se valores "iniciais" para as profundidades e calculando-se para as seções os valores de B, D e E. Com os coeficientes e uma condição de extremidade (nível d'água a montante ou a jusante), calcula-se os  $h_i$  pelas equações:

$$\begin{aligned} h_{i+1} &= \frac{E_i - B_i h_i}{D_i} \\ h_i &= \frac{E_i - D_i h_{i+1}}{B_i} \end{aligned} \tag{19}$$

Como inicialmente partiu-se de valores de  $y_i$  incorretos, o cálculo deve ser reiterado até que se obtenha para  $y_i$  valores próximos entre uma iteração e outra.

### 3.2 ESCOAMENTOS NÃO PERMANENTES

A modelação dos escoamentos não permanentes tem grande interesse nos estudos de translação de ondas de enchente nos canais e reservatórios, estudo dos efeitos de marés em estuários, enchimento e esvaziamento de eclusas e outros.

Nestes fenômenos são aplicadas as equações genéricas de Saint-Venant, como apresentado em (3) e (12), incluindo-se as diferenciais no tempo. A solução destas equações pode ser feita por métodos numéricos diversos, como o método das características, de diferenças finitas, de elementos finitos, etc.

A seguir apresentam-se o esquema de diferenças finitas de Preissman, que permite explicitar o cálculo das profundidades e vazões em cada instante, considerando ainda a influência das condições futuras (implicidade) e o esquema explícito de MckCormack.

#### 3.2.1 ESQUEMA IMPLÍCITO DE PREISSMAN

Para o esquema da Figura 8, as grandezas hidráulicas numa determinada posição podem ser escritas, em diferenças finitas como:

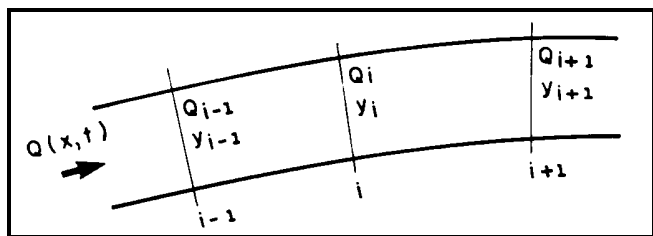


FIGURA 8

$$G(x,t) = \frac{\theta}{2} (G_{i+1} + G_i)^{t+1} + \left( \frac{1-\theta}{2} \right) (G_{i+1} + G_i)^t$$

$$= \frac{\theta}{2} (\Delta G_{i+1} + \Delta G_i) + \frac{1}{2} (G_{i+1} + G_i)$$

$$\frac{d}{dx} G(x,t) = \frac{\theta}{\Delta x} (G_{i+1} - G_i)^{t+1} + \left( \frac{1-\theta}{\Delta x} \right) (G_{i+1} - G_i)^t$$

$$= \frac{\theta}{\Delta x} (\Delta G_{i+1} - \Delta G_i) + \frac{1}{\Delta x} (G_{i+1} - G_i)$$

$$\frac{d}{dt} G(x,t) = \frac{1}{2\Delta x} (G_{i+1} + G_i)^{t+1} - \frac{1}{2\Delta x} (G_{i+1} + G_i)^t$$

$$= \frac{1}{2\Delta x} (\Delta G_{i+1} - \Delta G_i)$$

(20)

Aplicando-se as diferenças acima na equação da continuidade resulta:

$$\frac{\theta}{\Delta x} Q_{i+1} + \Delta Q_i + \frac{1-\theta}{\Delta x} Q_{i+1} + Q_i +$$

$$+ \frac{1}{2\Delta x} (Q_{i+1} - \Delta B_i) + \frac{1}{2} (B_{i+1} - B_i) + \frac{1}{2\Delta x} (Q_{i+1} - \Delta h_i) = 0$$

Desprezando-se os termos diferenciais de segunda ordem e adotando-se as simplificações:

$$\Delta B = \left( \frac{dB}{dh} \right) \Delta h \quad \frac{1}{G + \Delta G} = \frac{1}{G^2} \left( 1 - \frac{\Delta G}{G} \right)$$

resulta na equação:

$$A_i \Delta Q_i + B_i \Delta h_i + C_i \Delta Q_{i+1} + D_i \Delta h_{i+1} = E_i \quad (21)$$

onde os coeficientes são:

$$\begin{aligned} A_i &= -4\theta \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{1}{(B_{i+1} + B_i)} \\ B_i &= 1 - 4\theta \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{(Q_{i+1} - Q_i)}{(B_{i+1} + B_i)^2} \left( \frac{dB}{dh} \right)_i \\ C_i &= 4\theta \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{1}{(B_{i+1} + B_i)} \\ D_i &= 1 - 4\theta \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{(Q_{i+1} - Q_i)}{(B_{i+1} + B_i)^2} \left( \frac{dB}{dh} \right)_{i+1} \\ E_i &= 4 \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{(Q_{i+1} + Q_i)}{(B_{i+1} + B_i)} \end{aligned} \quad (22)$$

Da mesma forma, na equação do momento tem-se:

$$A'_i \Delta Q_i + B'_i \Delta h_i + C'_i \Delta Q_{i+1} + D'_i \Delta h_{i+1} = E'_i \quad (23)$$

onde os coeficientes são:

$$\begin{aligned} A'_i &= 1 + 2\theta \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \frac{Q_{i+1} - 2Q_i}{A_i} - \frac{Q_{i+1}}{A_{i+1}} - B_i \frac{Q_i}{A_i^2} (h_{i+1} + h_i) \right] + 2g\theta \Delta t \frac{A_i}{K_i} |Q_i| \\ B'_i &= -2\theta \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{B_i}{A_i^2} (Q_{i+1} - Q_i) - g\theta \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{B_i}{A_i^2} [A_{i+1} (1 - \beta_{i+1} F_{i+1}^2) + A_i (1 - \beta_i F_i^2)] + \\ &\quad + g\theta \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ 2B_i F_{i1}^2 - \frac{Q_i |Q_i|}{gA_i^2} \left( \frac{dB}{dh} \right)_i + B_i \right] (h_{i+1} - h_i) + \\ &\quad + 2g\theta \Delta t \theta \frac{Q_i |Q_i|}{K_i^2} \left[ \frac{B_i}{2} - \left( \frac{dK}{dh} \right)_i \frac{A_i}{K_i} \right] \\ C'_i &= 1 + 2\theta \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \frac{Q_{i+1} - 2Q_i}{A_{i+1}} - \frac{Q_i}{A_i} - B_{i+1} \frac{Q_{i+1}}{A_{i+1}^2} (h_{i+1} + h_i) \right] + 2g\theta \Delta t \frac{A_{i+1}}{K_{i+1}} |Q_{i+1}| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D'_i = & -2\theta \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{B_{i+1}}{A_{i+1}^2} (Q_{i+1} - Q_i) - g\theta \frac{\Delta t}{\Delta x} [A_{i+1}(1 - \beta_{i+1}F_{i+1}^2) + A_i(1 - \beta_iF_i^2)] + \\
 & + g\theta \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ 2B_{i+1}F_{i+1}^2 - \frac{Q_{+li}|Q_{i+1}|}{gA_{i+1}^2} \left( \frac{dB}{dh} \right)_{i+1} + B_{i+1} \right] (h_{i+1} - h_i) + \\
 & + 2g\Delta t\theta \frac{Q_{i+1}|Q_{i+1}|}{K_{i+1}^2} \left[ \frac{B_{i+1}}{2} - \left( \frac{dK}{dh} \right)_{i+1} \frac{A_{i+1}}{K_{i+1}} \right] \\
 E'_i = & -2 \frac{\Delta t}{\Delta x} (Q_{i+1} + Q_i) \left( \frac{Q_{i+1}}{A_{i+1}} + \frac{Q_i}{A_i} \right) - \\
 & - g\theta \frac{\Delta t}{\Delta x} [A_{i+1}(1 - \beta_{i+1}F_{i+1}^2) + A_i(1 - \beta_iF_i^2)](h_{i+1} + h_i) + \\
 & - g\Delta t \left[ \frac{A_{i+1}Q_{i+1}|Q_{i+1}|}{K_{i+1}^2} + \left[ \frac{A_iQ_i|Q_i|}{K_i^2} \right] \right]
 \end{aligned} \tag{24}$$

A solução das 2n equações com 2n+2 incógnitas pode ser obtida através da utilização de duas condições de contorno, uma a montante do canal, e outra a jusante do canal.

Considerando que as variações de profundidades e vazões em uma dada seção podem ser relacionadas por :

$$\Delta Q_i = F_i \Delta h_i + G_i \quad \text{e} \quad \Delta Q_{i+1} = F_{i+1} \Delta h_{i+1} + G_{i+1} \tag{25}$$

Substituindo-se (25) em (21) e (23), obtém-se:

$$(A_i F_i + B_i) \Delta h_i + C_i \Delta Q_{i+1} + D_i \Delta h_{i+1} = E_i - A_i G_i$$

$$(A'_i F_i + B'_i) \Delta h_i + C'_i \Delta Q_{i+1} + D'_i \Delta h_{i+1} = E'_i - A'_i G_i$$

que resolvendo o sistema conduz a:

$$\begin{aligned}
 \Delta h_i &= H_i \Delta Q_{i+1} + L_i \Delta h_{i+1} + M_i \\
 \Delta h_i &= H'_i \Delta Q_{i+1} + L'_i \Delta h_{i+1} + M'_i
 \end{aligned} \tag{26}$$

onde :

$$\begin{aligned}
 H_i &= -\frac{C_i}{A_i F_i + B_i} & L_i &= -\frac{D_i}{A_i F_i + B_i} & M_i &= -\frac{E_i - A_i G_i}{A_i F_i + B_i} \\
 H'_i &= -\frac{C'_i}{A'_i F_i + B'_i} & L'_i &= -\frac{D'_i}{A'_i F_i + B'_i} & M'_i &= -\frac{E'_i - A'_i G_i}{A'_i F_i + B'_i}
 \end{aligned}$$

Eliminando-se h; de (26), tem-se:

$$\Delta Q_i = \frac{L'_i - L_i}{H_i - H'_i} \Delta h_i + \frac{M'_i - M_i}{H_i - H'_i}$$

$$F_{i+1} = \frac{L'_i - L_i}{H_i - H'_i}$$

$$G_{i+1} = \frac{M'_i - M_i}{H_i - H'_i}$$

(27)

Assim, conhecendo-se Q ou h a montante calcula-se os coeficientes F e G para a primeira seção. Em seguida obtém-se L', M', F e G para todas as seções. Com a condição de contorno a jusante Q<sub>n</sub> ou h<sub>n</sub> obtém-se o nível ou a vazão que faltam na última seção e retorna-se calculando os níveis e vazões nas demais seções através das equações (26) e (27).

### 3.2.2 ESQUEMA EXPLÍCITO DE MACCORMACK

Chaudhry et alli. (1987,1989,1990,1991) e posteriormente Navarro (1992) apresentaram estudos da aplicação do esquema de MacCormack na simulação numérica dos escoamentos em canais regulares dotados de pontos singulares, ocorrência de ressaltos hidráulicos e variações de fundo, obtendo grande sucesso. Este esquema fundamenta-se na aplicação de diferenças finitas de segunda ordem de acuracidade.

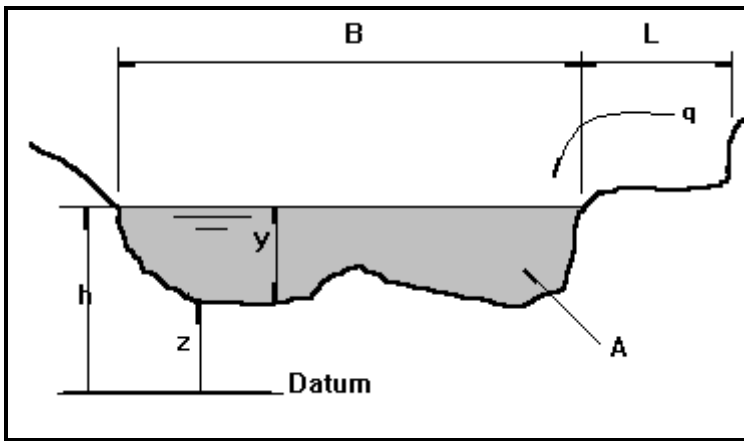


FIGURA 9

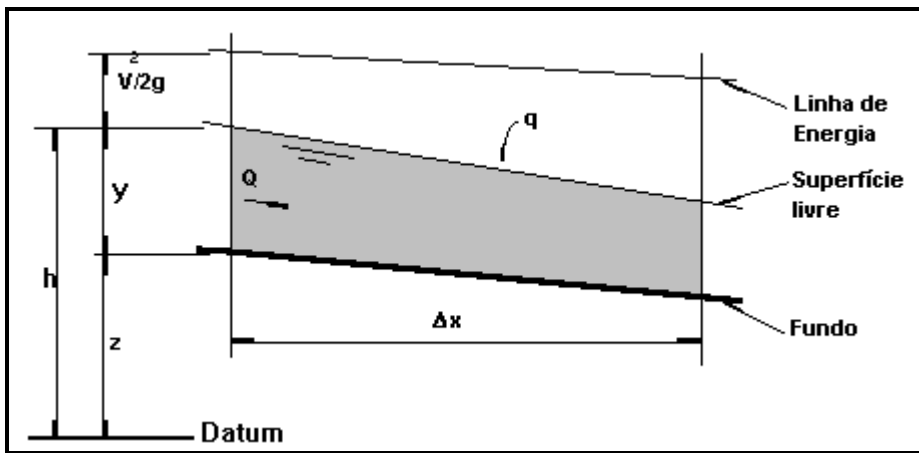


FIGURA 10

A discretização numérica do esquema de MacCormack considera um grid espaço-tempo conforme o indicado na Figura 11, e dois grupos de representações finitas para uma grandeza genérica G, denominados *predictor* e *corrector*. Especialmente,

o canal é discretizado através das seções transversais distanciadas de  $\Delta x$ . O domínio do tempo é dividido em intervalos  $\Delta t$ .

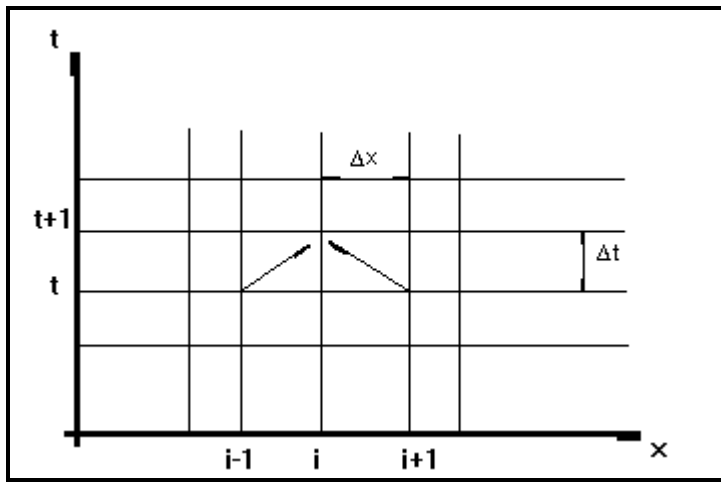


FIGURA 11: ESQUEMA DE DIFERENÇAS FINITAS

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{G_i^* - G_i^t}{\Delta t} \dots \frac{\partial G}{\partial x} = \frac{G_{i+i}^* - G_i^*}{\Delta x} \dots \bar{G} = \frac{G_{i+1}^t + G_i^t}{2} \tag{28}$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{G_i^{**} - G_i^*}{\Delta t} \dots \frac{\partial G}{\partial x} = \frac{G_i^{**} - G_{i-1}^*}{\Delta x} \dots \bar{G} = \frac{G_i^* + G_{i-1}^*}{2} \tag{29}$$

A aplicação das eq.(28) às equações básicas definem o passo de cálculo denominado *predictor*, da forma:

$$h_i^* = h_i^t + \frac{\Delta t}{\left( \bar{B}_{i+1} + \bar{L}_i \right)} \left( q_{s_{i+1}} - \left( \frac{\bar{Q}_{i+1}^t - Q_i^t}{\Delta x} \right) \right)$$

$$Q_i^* = Q_i^t - \Delta t \left[ \frac{\bar{Q}_{i+1}^2}{\bar{A}_{i+1}} \left( \frac{\beta_{i+1}^t - \beta_i^t}{\Delta x} \right) + 2\beta_{i+1}^- \frac{\bar{Q}_{i+1}}{\bar{A}_{i+1}} \left( \frac{Q_{i+1}^t - Q_i^t}{\Delta x} \right) - g \bar{A}_{i+1} \left( 1 - \beta_{i+1}^- F_{h_{i+1}}^- \right)^2 \left( \frac{h_{i+1}^t - h_i^t}{\Delta x} \right) - g \bar{A}_{i+1} S_{f_{i+1}} \right] + \bar{q}_{v_{i+1}} \bar{v}_{i+1} \cos \theta_{i+1} \tag{30}$$

Aplicando-se as equações de (29), obtém-se o passo *Corrector*:

$$h_i^{**} = h_i^* + \frac{\Delta t}{\left( \bar{B}_i + \bar{L}_i \right)} \left( q_{s_i} - \left( \frac{\bar{Q}_i^* - Q_{i-1}^*}{\Delta x} \right) \right)$$

$$Q_i^{**} = Q_i^* - \Delta t \left[ \frac{Q_i^*}{A_i} \left( \frac{\beta_i^* - \beta_{i-1}^*}{\Delta x} \right) + 2\beta_i^* \frac{Q_i^*}{A_i} \left( \frac{Q_i^* - Q_{i-1}^*}{\Delta x} \right) - g A_i \left( 1 - \beta_i^* F_{r_i}^2 \right) \left( \frac{h_i^* - h_{i-1}^*}{\Delta x} \right) + g A_i S_{f_i} \right] + q_i v_i \cos \varphi_i \quad (31)$$

Os valores finais das incognitas Q e y são calculados após os passos *predictor* e *corrector* da forma:

$$h^{t+1} = \frac{h_i^t + h_i^{**}}{2} \quad Q^{t+1} = \frac{Q_i^t + Q_i^{**}}{2} \quad (32)$$

Muitos autores indicam que o cálculo das variáveis h e Q podem ser corrigidos através da introdução de uma viscosidade artificial, para amortecimento das oscilações numéricas de altas ordens derivadas do método de discretização. Esta correção é dada por:

$$\varepsilon_i = \frac{|h_{i+1} - 2h_i + h_{i-1}|}{|h_{i+1}| + 2|h_i| + |h_{i-1}|}$$

$$\varepsilon_{i-\frac{1}{2}} = k \frac{\Delta t}{\Delta x} \max(\varepsilon_{i-1}, \varepsilon_i)$$

$$\varepsilon_{i+\frac{1}{2}} = k \frac{\Delta t}{\Delta x} \max(\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1})$$

$$G_i^{t+1} = G_i^{t+1} + \varepsilon_{i+\frac{1}{2}} (G_{i+1}^{t+1} - G_i^{t+1}) - \varepsilon_{i-\frac{1}{2}} (G_i^{t+1} - G_{i-1}^{t+1}) \quad (33)$$

O coeficiente de amortecimento k, segundo Chaudhry et alli.(1991) deve ser adotado em cada caso sempre o menor possível, mas suficiente para amortecimento das oscilações de alta frequência características.

Sendo um método explícito, a estabilidade numérica é garantida ao ser obedecida as condições de Courant-Friedrichs-Lewys, conforme indicado em (34):

$$C_n = (v + \sqrt{gy}) \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (34)$$

O algoritmo de solução apresenta 4 etapas para cada passo de tempo:

1. Predictor

- a) calculam-se os valores de Q\* e h\* para os pontos i=1,...n-1, utilizando-se as equações (30).
- b) com as condições de contorno corrigem-se os valores de Q<sub>1</sub> ou h<sub>1</sub> e Q<sub>n</sub> ou h<sub>n</sub>.

2. Corrector

a) calculam os valores de  $Q^{**}$  e  $h^{**}$  para os pontos  $i=2, \dots, n$ , com as equações (31).

b) com as mesmas condições de contorno corrigem os valores de  $Q_1$  ou  $h_1$  e  $Q_n$  ou  $h_n$ .

3. Cálculo de  $h$  e  $Q$

a) calculam-se os valores de  $Q^{t+1}$  e  $h^{t+1}$  a partir de (32).

b) com  $Q^{t+1}$  e  $h^{t+1}$  estima-se o novo  $\Delta t$  para cálculo do passo seguinte

4. Correção dos valores de  $Q^{t+1}$  e  $h^{t+1}$  através das equações (34).

Com a série de equações acima foi desenvolvido o modelo matemático SIMM, destinado a simulação de canais com seção transversal qualquer, utilizando o esquema de MacCormack. Testes de verificação foram efetuados com os dados apresentados por Garcia-Navarro et alli, (1992). Este autor aplicou um modelo baseado no esquema explícito de MacCormack complementado com a teoria da minimização da variação total para amortecimento das oscilações de alta frequência produzidas pelos esquemas explícitos.

Para comparação foi simulado o mesmo canal, de seção trapezoidal com base 6 m e taludes inclinados  $H:V=0.25$ . A simulação foi efetuada impondo-se um hidrograma com vazão inicial  $20 \text{ m}^3/\text{s}$ , variando até  $50 \text{ m}^3/\text{s}$  bruscamente, permanecendo em  $50 \text{ m}^3/\text{s}$  por 30 s e decrescendo até  $20 \text{ m}^3/\text{s}$  novamente em 30 s. Foi considerado o coeficiente  $n = 0.015$  para as perdas por atrito e a simulação foi feita com número de Courant  $C$  da ordem 0.9. A comparação entre os resultados obtidos por Garcia-Navarro e os apresentados pelo modelo SIMM são apresentadas nas figuras seguintes.

No modelo SIMM foi adotado 0.01 para o fator  $K$  de viscosidade artificial, com o objetivo de amortecimento das oscilações de alta frequência. Em ambos os casos foram utilizadas 51 seções de cálculo.

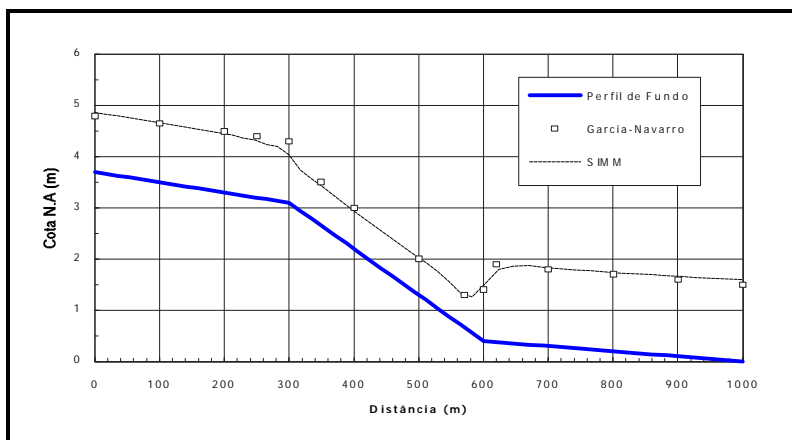


FIGURA 12: RESULTADOS MODELO SIMM E GARCIA-NAVARRO PARA T=0S

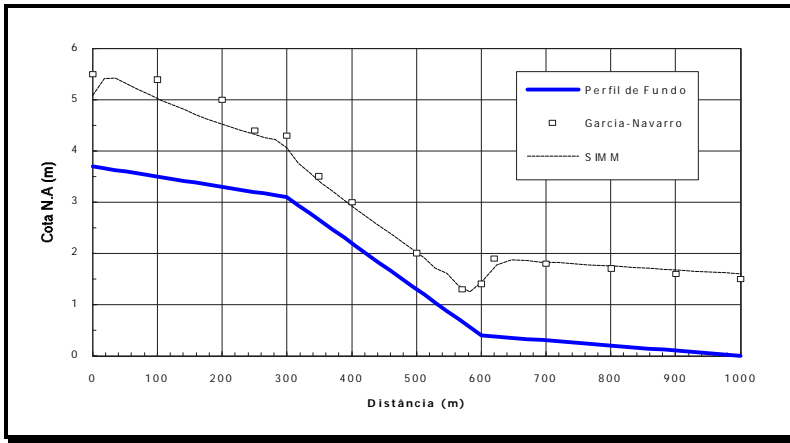


FIGURA 13: RESULTADOS MODELO SIMM E GARCIA-NAVARRO PARA T=30S

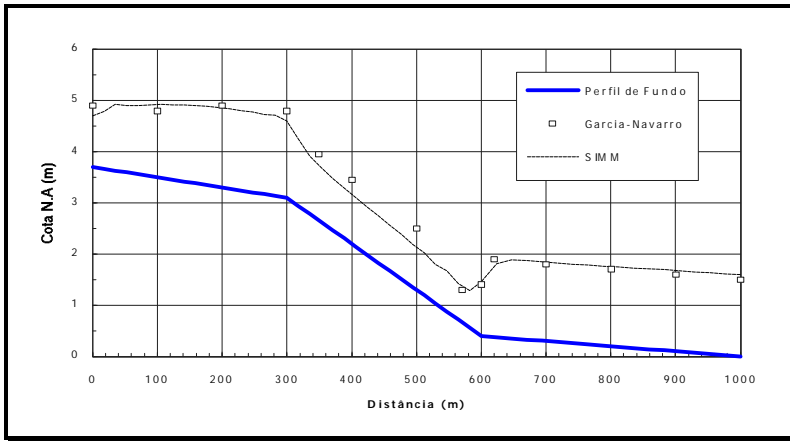


FIGURA 14: RESULTADOS MODELO SIMM E GARCIA-NAVARRO PARA T=70S

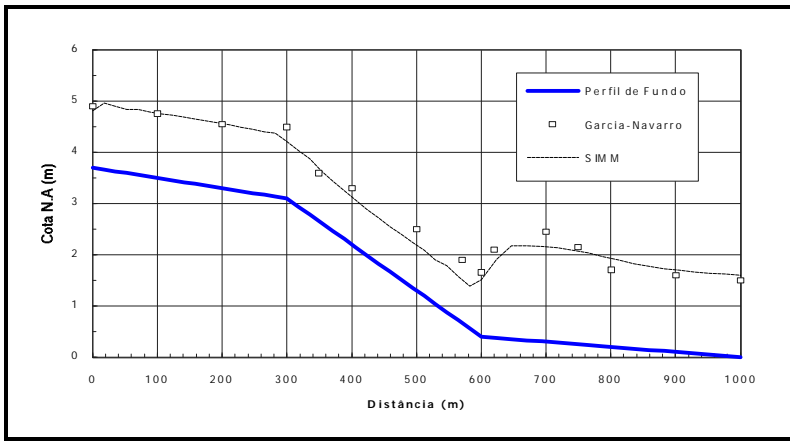


FIGURA 15: RESULTADOS MODELO SIMM E GARCIA-NAVARRO PARA T=110S

Observa-se que os resultados são totalmente compatíveis, apresentando o modelo SIMM uma melhor concordância entre os pontos singulares no início e no fim do trecho com maior declividade. Isto se deve a introdução do efeito de filtragem das oscilações através da viscosidade artificial. Observa-se que o posicionamento do ressalto hidráulico diverge ligeiramente no instante final do cálculo, provavelmente devido a diferenças na consideração das condições de contorno a jusante.

#### 4. REPRESENTAÇÃO DAS SEÇÕES DE CANAIS OU RIOS

A discretização do rio ou canal para cálculo do regime permanente ou variado é sempre feita através de seções transversais típicas. A escolha do número de seções deve atender ao critério de se representar o mais fielmente possível as variações do curso d'água, tanto em planta como em perfil.

A escolha de um número pequeno de seções pode levar a erros físicos muito grandes e, por outro lado, um número elevado de seções provoca grande quantidade de cálculos, aumentando a propagação de erros numéricos. Vários autores tem citado que o espaçamento ideal de seções deve ser entre 10 L e 20 L, sendo L a largura da seção à superfície. Trechos sinuosos ou com grandes variações de fundo devem ser representados por seções menos espaçadas, que traduzam as influências dos alargamentos e estreitamentos bruscos, soleiras de fundo, etc.

As seções transversais devem ter seus parâmetros bem avaliados para cada cota assumida pelo nível d'água. Representando-se as seções através de pontos cartesianos, os parâmetros podem ser calculados através da sub-divisão da área em lamelas verticais. O computo dos parâmetros fica assim definido:

a) Área Molhada  $\rightarrow A = \sum_1^{n-1} A_i$

b) Perímetro Molhado  $\rightarrow p = \sum_1^{n-1} p_i$

c) Largura Superficial  $\rightarrow B = \sum_1^{n-1} B_i$

d) Raio Hidráulico  $\rightarrow R_h = \left( \frac{A_i R_{h_i}^{2/3}}{A} \right)^{3/2}$

e) Coeficiente  $\beta \rightarrow \beta = \frac{\sum_1^{n-1} A_i (C_i \sqrt{R_{h_i} S_f})^2}{A (C \sqrt{R_h S_f})^2}$

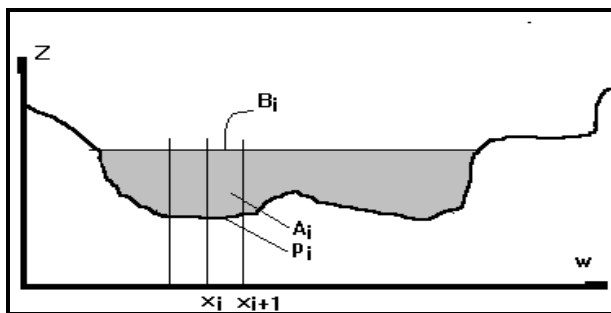


FIGURA 16: ELEMENTOS GEOMÉTRICOS DA SEÇÃO TRANSVERSAL

## 5. REFERÊNCIAS

**Bhallamudi**, S. Murty & **Chaudhry**, M. Hanif Numerical Modelling of Aggradation and Degradation in Alluvial Channels, ASCE, v.117, No. 9, p.1145-1164, Set. 1991.

**Gharangik**, Araz M. & **Chaudhry**, M. Hanif Numerical Simulation of Hydraulic Jump, ASCE, v.117, No. 9, p. 1195-1211, Set. 1991.

**Garcia-Navarro**, P. & **Alcrudo**, F. & **Savirón**, J. M. 1-D Open-Channel Flow Simulation Using TVD-MacCormack Scheme, ASCE, v.118, No. 10, p.1359-1371, Out, 1992.

**Dammuller**, D. C. & **Bhallamudi**, S. Murty & **Chaudhry**, M. Hanif Modelling of Unsteady Flow in Curved Channels, ASCE, v.115, No.11, p.1479-1495, Nov. 1989.

**Fennema**, Robert J. & **Chaudhry**, M. Hanif Explicit Methods for 2-D Transient Free Surface Flow, ASCE, v.116, No.8, p.1013-1034, Ago. 1990.